数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 42-47

CAPPELL-SHANESON'S GROUP AND EQUIVARIANT SURGERY

MASAHARU MORIMOTO

Dedicated to Professor Atsushi Nakajima on his 60th birthday

ABSTRACT

この論文では，ホモロジー同値写像を surgery によって得るための障害類群として発見された Cappell-Shaneson 群の定義を復習し，同変手術の理論に翻訳する．

1. INTRODUCTION

有限群 G がコンパクト（C^∞-級の）多様体 Y に（C^∞-級で，左から）作用しているとしよう．一般に Y の基点 y_0 を定めれば，Y の基本群 $\pi_1(Y)$ の Y の普遍被覆空間 $\widetilde{Y}$ への（左）作用を標準的な方法で定めることができる．特に $y_0 \in Y^G$ の場合には G の Y への作用は $\widetilde{Y}$ への作用にリフトし，G と $\pi_1(Y)$ の半直積 $G \ltimes \pi_1(Y)$ が $\widetilde{Y}$ に自然に作用して，被覆写像が G-同変になる (cf. [6])．今 Y が向き付けされているとしよう．G の Y 上の作用から orientation homomorphism $w_Y : G \to \{1,-1\}$ が，また $G \ltimes \pi_1(Y)$ の $\widetilde{Y}$ 上の作用から $w_{\widetilde{Y}} : G \ltimes \pi_1(Y) \to \{1,-1\}$ が定まる．このとき，$\pi_1(Y)$ は $w_{\widetilde{Y}}$ の kernel に含まれる．G-surgery 問題 $X \to Y$ の考察は，概ね $G \ltimes \pi_1(Y)$-surgery 問題 $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ の考察に帰着される．この方針を用いて Cappell-Shaneson の（ホモロジー）手術理論を同変（ホモロジー）手術理論に翻訳することがこの論文の目標である．結果を定理 3.1，3.3 として記述してあるので，ご覧頂きたい．

このホモロジー同値写像を得るための同変手術理論は，(球面のようにタイプの指定された）多様体上の滑らかな作用の不動点集合として現れる閉多様体の決定に応用される．具体的には，[7] で得られている結果の様々な仮定を取り除くことを目標にしている．

2. CAPPELL-SHANESON 群の定義

Cappell-Shaneson は論文 [2] において手術障害類を群 $\Gamma^h_\lambda(\mathcal{F})$ の要素として定め，それが framed cobordism invariant であることを証明した．彼らは Wall と同様に，右加群を用いて障害類や障害類群を定義しているが，我々は左加群を用いて障害類群を定義してみよう．

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 57R67, 57S17. Secondary: 19G12, 19J25, 20C05.
Key words and phrases. Equivariant surgery, surgery obstruction, group action, homology equivalence.
Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (KAKENHI) 12640072.

（離散）群 Ω の群環 $\mathbb{Z}[\Omega]$ について復習しよう．群の準同型 $w:\Omega\to\{1,-1\}$ を固定すると，$\mathbb{Z}[\Omega]$ は (anti-)involution $-$ を持つ．すなわち

$$\overline{ma}=mw(a)a^{-1}\quad(m\in\mathbb{Z},\ a\in\Omega)$$

が成り立つように involution を定める．Λ も (anti-)involution を持つ環とし，$\mathcal{F}:\mathbb{Z}[\Omega]\to\Lambda$ は involution を保つ locally epic な環の準同型写像とする．$\mathcal{F}$ が *locally epic* とは Λ における有限個の任意の要素 $y_1,\ldots,y_n$ に対して，Λ の可逆元 z と $\mathbb{Z}[\Omega]$ の要素 $x_1,\ldots,x_n$ で $\mathcal{F}(x_i)=zy_i$ ($\forall i=1,\ldots,n$) をみたすものが存在するときをいう．手術障害類群を考える際の対称性を λ で表し，すなわち $\lambda=1$ or -1 とし，それに同伴する Λ の minimal form parameter (cf. [1]) を $\min_\lambda(\Lambda)$ で表す．つまり，

$$\min_\lambda(\Lambda)=\{a-\lambda\bar{a}\mid a\in\Lambda\}$$

である．

Cappell-Shaneson に従い，以下のような三つ組 $\alpha=(H,\varphi,\mu)$ を *λ-form over $\mathcal{F}$* と呼ぶ．ここで，H は有限生成 left $\mathbb{Z}[\Omega]$-module, $\varphi:H\times H\to\mathbb{Z}[\Omega]$ は biadditive map，$\mu:H\to\mathbb{Z}[\Omega]/\min_\lambda(\mathbb{Z}[\Omega])$ は map で以下の条件をみたすものとする (cf. [2, p.286, (Q1)–(Q6)]):

(Q1′) $\varphi(ax,by)=b\varphi(x,y)\bar{a}$,

(Q2′) $\varphi(x,y)=\lambda\overline{\varphi(y,x)}$,

(Q3′) $\varphi(x,x)=\widetilde{\mu(x)}+\lambda\overline{\widetilde{\mu(x)}}$,

(Q4′) $\mu(x+y)-\mu(x)-\mu(y)=\varphi(x,y)\mod\min_\lambda(\mathbb{Z}[\Omega])$,

(Q5′) $\mu(ax)=a\mu(x)\bar{a}$,

(Q6′) $H_\Lambda:=\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}[\Omega]}H$ は stably free Λ-module (without a specified stable base) で，写像 $A\varphi_\Lambda:H_\Lambda\to\mathrm{Hom}_\Lambda(H_\Lambda,\Lambda)$ （ただし $A\varphi_\Lambda(u)(v)=\varphi_\Lambda(u,v)$ で与えられるもの）は全単射である，

ここで $a,b\in\mathbb{Z}[\Omega]$, $x,y\in H$, $u,v\in H_\Lambda$，$\widetilde{\mu(x)}$ は $\mu(x)$ のリフトであり，$\varphi_\Lambda:H_\Lambda\times H_\Lambda\to\Lambda$ は φ から誘導されるものである．

このような α は Λ 上の (nonsingular) λ-from，すなわち λ-quadratic module, $\alpha_\Lambda=(H_\Lambda,\varphi_\Lambda,\mu_\Lambda)$ を定める，ここで μ_Λ は $H_\Lambda\to\Lambda/\min_\lambda(\Lambda)$ である．慣例に従い，$-\alpha$ で $\mathcal{F}$ 上の λ-form $(H,-\varphi,-\mu)$ を表す．

H_Λ の Λ-submodule U が α_Λ の ***subkernel*** であるとは，U が H_Λ の stably free な Λ-直和因子で，$\varphi_\Lambda(U,U)=0$，$\mu_\Lambda(U)=0$，かつ $U^\perp=U$ をみたすときをいう．ここで，

$$U^\perp=\{x\in H_\Lambda\mid\varphi_\Lambda(x,y)=0\ \ (\forall y\in U)\}$$

である．H の $\mathbb{Z}[\Omega]$-submodule K が α の ***presubkernel*** であるとは，$\varphi(K,K)=\{0\}$, $\mu(K)=\{0\}$ をみたし，さらに H_Λ における K_Λ の像 K' が α_Λ の subkernel になるときをいう．α が presubkernel

を持つとき，α は *strongly equivalent to zero* であるといわれ，$\alpha \approx 0$ と表される．任意の λ-form $\alpha = (H, \varphi, \mu)$ over $\mathcal{F}$ に対して，

$$\alpha \perp -\alpha \approx 0$$

であることが容易に示される．ここで $\perp$ は λ-forms としての orthogonal sum を表す．

論文 [3, p.468], [1, p.7] に倣い，$\mathbb{H}(\mathbb{Z}[\Omega]^s)$ により rank $2s$ の λ-hyperbolic $\mathbb{Z}[\Omega]$-module を表す．これは $\mathcal{F}$ 上の λ-form とみなすことができ，strongly equivalent to zero である．2 つの $\mathcal{F}$ 上の λ-forms α and β が *stably equivalent* とは，ある strongly equivalent to 0 な $\mathcal{F}$ 上の λ-form γ に対して $\alpha \perp (-\beta) \perp \gamma$ が strongly equivalent to zero であるときをいう．またこのとき，$\alpha \sim \beta$ と表される．

以上の terminology により，λ-forms over $\mathcal{F}$ の stable equivalence classes の全体を $\Gamma^h_\lambda(\mathcal{F})$ で表す．$\Gamma^h_\lambda(\mathcal{F})$ が orthogonal sum (cf. [2, p.287]) のもとで可換群になることは容易に確かめられる．偶数 $n = 2k$ に対しては $\Gamma^h_n(\mathcal{F})$ は $\Gamma^h_{(-1)^k}(\mathcal{F})$ を意味するものとする．

これらの定義は $\mathbb{Z}$ を単位元を持つ可換環 R で，また $\mathcal{F} : \mathbb{Z}[\Omega] \to \Lambda$ を involution を保つ locally epic な準同型写像 $\mathcal{F} : R[\Omega] \to \Lambda$ で置き換えて一般化することができる．

手術障害類が $\Gamma^h_\lambda(\mathcal{F})$ の要素として 0 であるという代数的情報から surgery をして homology 同値にできるという幾何学的な情報を導く鍵となる Lemma をここで紹介しよう．

補題 2.1 ([2, Lemma 1.3]). *λ-form α over $\mathcal{F} : R[\Omega] \to \Lambda$ が $\alpha \sim 0$ をみたせば，ある自然数 s に対し*

$$\alpha \perp \mathbb{H}(R[\Omega]^s) \approx 0$$

である．

以後，R は locally epic な環の準同型写像 $\mathbb{Z} \to R$ が指定されているものとする．また G は有限群で，$\Omega \to G$ は群の epimorphism とする．さらに $w : \Omega \to \{1, -1\}$ は準同型写像 $G \to \{1, -1\}$ により分解するものとする．自然に誘導される準同型写像

$$\mathcal{F} : \mathbb{Z}[\Omega] \to R[G]$$

は involution を保ち，locally epic である．また準同型写像

$$\mathcal{F}_R : R[\Omega] \to R[G]$$

も同様である．

命題 2.2. $R \subsetneqq \mathbb{Q}$ ならば自然な準同型写像 $\Gamma^h_\lambda(\mathcal{F}) \to \Gamma^h_\lambda(\mathcal{F}_R)$ は単射である．

Proof. $\alpha = (H, \varphi, \mu)$ は $\mathcal{F}$ 上の λ-form で $\alpha_{R[\Omega]} \sim 0$ とする．[2, Lemma 1.3] により，ある自然数 s に対して $\alpha_{R[\Omega]} \perp \mathbb{H}(R[\Omega]^s) \approx 0$ が判る．$\alpha_{R[\Omega]} \perp \mathbb{H}(R[\Omega]^s)$ の presubkernel K を考える．$\mathbb{Z} \subseteq R$,

$H \subseteq H_{R[\Omega]}$, $\mathbb{Z}[\Omega]^s \subseteq R[\Omega]^s$ とみなすとき，R のある単元 u により，

$$U = \{ux \mid x \in K\}$$

は $H \oplus \mathbb{Z}[\Omega]^s \oplus \mathbb{Z}[\Omega]^s$ に含まれる．従って，U が $\alpha \perp \mathbb{H}(\mathbb{Z}[\Omega]^s)$ の presubkernel となる．よって $\alpha \sim 0$ が判る． □

3. 同変手術障害定理

この section では，偶数次元の G-framed map (f,b) の定義とそれを G-surgery によりホモロジー同値にするための障害類 $\sigma(f,b)$ について述べる．

X, Y は連結な向き付けられたコンパクト（C^∞-級）G-多様体とする．X の *singular set* X_{sing} を

$$X_{\mathrm{sing}} = \bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} X^g$$

で定義する．また，$f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ は（連続な）G-写像 とする．さらに，Y 上のある G-ベクトル束 η, ξ に対し $b : T(X) \oplus f^*\eta \to f^*\xi$ は G-ベクトル束としての同型写像（Y 上の恒等写像を cover するもの）とする．このようなペア (f,b) を *G-framed map* と呼ぶ．もし f の写像度が 1 (resp. homology equivalence) であれば (f,b) の写像度は 1 (resp. homology equivalence) であるという．素数 p に対し，

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ (b,p) = 1 \right\}$$

とおく．

定理 3.1 (偶数次元). Y は向き付けられたコンパクト多様体でその次元は偶数 $n = 2k \geq 6$ で，$Y^G \neq \emptyset$ をみたすものとする．ペア (f,b), $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, は上に述べた写像度 1 の *$G$-framed map* とする．また p は素数，$\mathcal{F} : \mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)] \to \mathbb{Z}_{(p)}[G]$ は標準準同型写像を表すものとし，次の (1)–(4) が成り立つものと仮定する．

(1) $X^g < k-1$ ($\forall g \in G \setminus \{e\}$),

(2) $\partial f := f|_{\partial X} : \partial X \to \partial Y$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* である,

(3) 単位群ではない p-巾位数の部分群 $P \leq G$ に対して $f^P : X^P \to Y^P$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* である,

(4) $\chi(X^g) = \chi(Y^g)$ ($\forall g \in G \setminus \{e\}$).

このとき *G-framed map* (f,b) は可換群 $\Gamma^h_n(\mathcal{F})$ の要素 $\sigma(f,b)$ を定め，次の (A)–(C) は同値である．

(A) $\sigma(f,b) = 0$.

(B) (f,b) は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* に（*boundary* ∂X と *singular set* X_{sing} を不変にして）*G-framed cobordant* である．

(C) (f,b) は $(k-1)$-*connected* な $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* に（*boundary* と *singular set* を不変にして）*G-framed cobordant* である．

注意 3.2. 定理 2.2 により，手術障害類 $\sigma(f,b)$ は $\Gamma_n^h(\mathcal{F})$ の要素と考えるより，$\Gamma_n^h(\mathcal{F}_{(p)})$ の要素と考える方が都合の良いことが多い，ただし $\mathcal{F}_{(p)} : \mathbb{Z}_{(p)}[G \ltimes \pi_1(Y)] \to \mathbb{Z}_{(p)}[G]$ である．

定理 3.3 (奇数次元). Y は向き付けられたコンパクト多様体でその次元は奇数 $n = 2k+1 \geq 5$ で，$Y^G \neq \varnothing$ をみたすものとする．ペア (f,b), $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, は写像度 1 の *G-framed map* とする．また p は素数とし，次の (1)–(4) が成り立つものと仮定する．

(1) $X^g \leq k-1$ $(\forall g \in G \setminus \{e\})$,

(2) $\partial f := f|_{\partial X} : \partial X \to \partial Y$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* である，

(3) 単位群ではない p-巾位数の部分群 $P \leq G$ に対して $f^P : X^P \to Y^P$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* である，

(4) $\chi(X^g) = \chi(Y^g)$ $(\forall g \in G \setminus \{e\})$.

このとき *G-framed map* (f,b) は可換群 $L_n^h(\mathbb{Z}_{(p)}[G], w_Y)$ の要素 $\sigma(f,b)$ を定め，次の (A)–(C) は同値である．

(A) $\sigma(f,b) = 0$.

(B) (f,b) は $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* に（*boundary* と *singular set* を不変にして）*G-framed cobordant* である．

(C) (f,b) は $(k-1)$-*connected* な $\mathbb{Z}_{(p)}$-*homology equivalence* に（*boundary* と *singular set* を不変にして）*G-framed cobordant* である．

4. 偶数次元の同変手術障害類の定め方

この section では (f,b) を定理 3.1 における G-framed map とし，ホモロジー手術障害類 $\sigma(f,b)$ がどのようにして定められるかを解説する．

始めに $\lambda = (-1)^k$ とおく．定理 3.1 (1) は通常 *strong gap condition* と呼ばれる．この仮定が成り立つとき，k 次元までの同変手術を X に施して，boundary ∂X と singular set X_{sing} を変えずに，k-連結な $f' : X' \to Y$ を持つ G-framed map (f', b') を得ることができる．このとき，定理 3.1 (3)–(4) にある仮定と [8, Lemma 2.4] を用いれば，

$$K = \mathrm{Ker}[f'_* : H_k(X'; \mathbb{Z}_{(p)}) \to H_k(Y; \mathbb{Z}_{(p)})]$$

は $\mathbb{Z}_{(p)}[G]$-free module であることが示せる．$\widetilde{X'}$ により X' の普遍被覆空間を表し，$\mathcal{F}$ により自然な準同型写像 $\mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)] \to \mathbb{Z}_{(p)}[G]$ を表そう．$\mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)]$-module $\widetilde{K}$ を

$$\widetilde{K} = \mathrm{Ker}[\widetilde{f'}_* : H_k(\widetilde{X'}; \mathbb{Z}) \to H_k(\widetilde{Y}; \mathbb{Z})]$$

で定める．このとき，$\widetilde{K}$ 上の equivariant intersection form

$$\varphi : \widetilde{K} \times \widetilde{K} \longrightarrow \mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)]$$

と equivariant self-intersection form

$$\mu : \widetilde{K} \longrightarrow \mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)]/\mathrm{min}_\lambda(\mathbb{Z}[G \ltimes \pi_1(Y)])$$

が Wall の手術理論 [10] と同様にして定まる．

我々の $\sigma(f,b) \in \Gamma^h_\lambda(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ 上の λ-form $(\widetilde{K}, \varphi, \mu)$ の stable equivalence class として定義する．

この $\sigma(f,b)$ が (f', b') の選び方に依らずに定まること，また G-framed cobordism invariant であることは，通常の（同変）手術と全く同様にして示すことができる (cf. [2], [10], [4], [5])．

REFERENCES

[1] A. Bak, *K-theory of Forms*, Annals of Math. Studies 98, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[2] S. E. Cappell and J. L. Shaneson, *The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds*, Ann. of Math. **99** (1974), 277–348.

[3] M. Morimoto, *Bak groups and equivariant surgery*, K-Theory **2** (1989), 465–483.

[4] M. Morimoto, *Bak groups and equivariant surgery II*, K-Theory **3** (1990), 505–521.

[5] M. Morimoto, *Equivariant surgery with middle dimensional singular sets. II: Equivariant framed cobordism invariance*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 2427–2440.

[6] M. Morimoto and K. Iizuka, *Extendibility of G-maps to pseudoequivalences to finite G-CW-complexes whose fundamental groups are finite*, Osaka J. Math. **21** (1984), 59–69.

[7] M. Morimoto and K. Pawałowski, *Smooth actions of finite Oliver groups on spheres*, to appear in Topology (2002).

[8] R. Oliver and T. Petrie, *G-CW-surgery and* $K_0(\mathbb{Z}[G])$, Math. Z. **179** (1982), 11–42.

[9] R. G. Swan, *Induced representations and projective modules*, Ann. of Math. **71** (1960), 552–578.

[10] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, London–New York, 1970.

Department of Environmental and Mathematical Sciences
Faculty of Environmental Science and Technology
Okayama University
Tsushimanaka 3-1-1
Okayama, 700-8530 Japan